JIHOČESKÁ UNIVERZITA
V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
Zdravotně sociální fakulta

VYBRANÉ KAPITOLY Z OBECNÉ A TEORETICKÉ FYZIKY I.

doplňkové texty pro posluchače kombinované formy studia
studijního programu „B5345 – Specializace ve zdravotnictví“

studijního oboru „Radiologický asistent“

Doc. RNDr. Přemysl Záškodný,CSc.

ČESKÉ BUDĚJOVICE 2007

VYBRANÉ KAPITOLY

Z OBECNÉ A TEORETICKÉ FYZIKY 1

(KLASICKÁ FYZIKA)

1. Struktura fyziky

Klíčová slova: Statistická a nestatistická fyzika,
Klasická dimenze,
Kvantová dimenze,
Relativistická dimenze,
Pohybová rovnice a pohybový zákon

1.1. Model struktury fyziky a jeho popis

Fyzika jako jedna z přírodních věd

Zkoumané přírodní objekty

Zkoumané vlastnosti přírodních objektů

Členění objektů dle počtu a velikosti

Podstata objektů

Vývoj objektů

Vnější podmínky a nezávislé vnitřní vlastnosti objektů

Statistický a nestatistický charakter objektu

Makrosystémy
Mikroobjekty
Makroobjekty
Megaobjekty
II.1.

Vzájemné působení látek a polí **II.2.**

Rozpad obecné unitární interakce na dílčí interakce **II.3.**

Vnější a vnitřní stavové parametry
Časová neproměnnost a proměnnost parametrů

Makrosystém fyzikálních mikroobjektů

Fyzikální objekty členěné podle velikosti

Přehled stavebních prvků fyzikálních objektů a nositelů interakcí v současném mikrosvětě, makrosvětě a megasvětě
II.1. + II.2. + II.3.

Rovnovážné a nerovnovážné pohybové stavy a jejich změna jako nestatistický pohyb

Rovnovážné a nerovnovážné termodynamické stavy a jejich změna jako statistický pohyb **II.4.**

Fyzika jako konkrétní přírodní věda

a)Konkrétní formy pohybu: Popis konkrétních způsobů změn stavových parametrů v rámci statistického (neuspořádaného) pohybu u makrosystémů a nestatistického (uspořádaného) pohybu u mikroobjektů, makroobjektů a megaobjektů **II.5.**

b)Předmět zkoumání fyziky: Stavy fyzikálních objektů a jejich změny na základě vzájemného působení látek a polí **II.6.**

c)Základní metody fyziky: Na základě experimentálních zkušeností a prostřednictvím fyzikální měřící techniky statistický přístup jako základní metoda statistické fyziky a nestatistický přístup jako základní metoda nestatistické fyziky **II.6.**

Kvaziklasický statistický přístup a jeho relativistická dimenze v rámci oborů statistické fyziky **II.7.**

Klasický, kvantový a relativistický nestatistický přístup v rámci oborů nestatistické fyziky **II.8.**

Zprostředkované výsledky fyziky
Metodika zkoumání obecného makrosystému, popis vlastností konkrétních makrosystémů
Metodika zkoumání a popis vlastností látkového objektu a elektromagnetického pole

Popis modelu kognitivní struktury lze provéstprostřednictvím stručného obsahu

Model na Obr.1 lze stručně popsat následujícím způsobem (v uvedené literatuře je popis proveden pomocí odstavců, které mají v Obr.1 označení II.1. až II.8.):

a) Fyzika jako jedna z přírodních věd zkoumá makrosystémy tvořené obrovským počtem objektů (většinou částic) pohybujících se neuspořádaným (statistickým) pohybem. Dále zkoumá mikroobjekty, makroobjekty a megaobjekty, které jsou buď osamocené nebo tvořeny objekty, které se pohybují uspořádaným (nestatistickým) pohybem (např. proud částic nebo vlnění). Podstatou těchto objektů je vzájemné působení látek a polí. Vývoj těchto objektů až do současnosti je spojen s postupným rozpadem obecné unitární interakce na dílčí interakce (gravitační, elektromagnetickou, silnou a slabou interakci)

b) Makrosystémy mají statistický charakter, je brána v úvahu jejich vnitřní struktura. Zkoumá je statistická fyzika, jejich stavy se nazývají stavy termodynamickými. Možným stavům je přiřazována pravděpodobnost jejich výskytu pomocí distribučních funkcí, stavové parametry těchto stavů jsou souborovými středními hodnotami fyzikálních veličin. Pohyb je pojímán jako změna stavu. Většinou jsou zkoumány stavy termodynamické rovnováhy, v nichž se střední hodnoty stavových parametrů s časem nemění. Příkladem mohou být makrosystémy molekul vzduchu, ale také makrosystémy fermionů (např. elektronový plyn v kovech jako degenerovaný Fermiho plyn) nebo bosonů (např. fotonový plyn záření černého tělesa nebo fononový a rotonový plyn v krystalech, amorfních látkách a supravodivých materiálech jako degenerované Boseho plyny)

c) Mikroobjekty, makroobjekty a megaobjekty mají nestatistický charakter, jejich vnitřní struktura není brána v úvahu. Zkoumá je nestatistická fyzika, jejich stavy se nazývají stavy pohybovými. Popis pohybových stavů umožňují pohybové zákony (kinematika), příčiny změn pohybových stavů umožňují popsat pohybové rovnice (dynamika). Jsou zkoumány stavy rovnovážné (statické, stacionární) a také stavy nerovnovážné (kvazistacionární, nestacionární). Pohyb je opět pojímán jako změna stavu. Příkladem stacionárního stavu může být stav vázaného elektronu v obalu atomu, který nezáří a neabsorbuje. Příkladem nestacionárního stavu může být stav vázaného elektronu při jeho excitaci nebo deexcitaci (atom při excitaci může absorbovat foton, při deexcitaci naopak foton vyzařovat).

d) Statistická i nestatistická fyzika mají svou variantu klasickou, kvantovou (je uplatňován vlnově korpuskulární dualismus) a relativistickou (prostor a čas závisí na rozložení a pohybu fyzikálních objektů). V rámci statistické fyziky jsou tyto tři dimenze spojovány do kvaziklasického statistického přístupu, v rámci nestatistické fyziky je klasická dimenze zkoumána klasickou mechanikou a klasickými aplikacemi elektromagnetického pole, kvantová a relativistická dimenze kvantovou a relativistickou mechanikou a kvantovými a relativistickými aplikacemi elektromagnetického pole.

e) Nestatistickou fyziku (nestatistický přístup) lze vystavět na základě pojmů **“pohybová rovnice”** (např. druhý Newtonův zákon v klasické mechanice, nestacionární Schrödingerova rovnice v nerelativistické kvantové mechanice) a **“pohybový zákon”** (např. tvar trajektorie jako množina koncových bodů polohového vektoru v klasické mechanice; v kvantové mechanice si lze představit tvar trajektorie jako množinu “pravděpodobnostních oblaků” vázaného elektronu při jeho excitaci nebo deexcitaci v obalu atomu).

f) Statistickou fyziku (statistický přístup) lze vystavět na pojmu **“distribuční funkce**” (např. Maxwellova distribuce rychlostí v molekulách plynu jako jednoduchá aplikace Maxwellova-Boltzmannova rozdělení) a “**souborová střední hodnota**” (např. střední kvadratická rychlost molekul plynu).

1.2. Potřebné matematické znalosti pro aplikaci na radiologii

- Systém elementárních funkcí

a) Číselné množiny (množina přirozených čísel, množina reálných čísel, množina komplexních čísel)
b) Polynomické funkce, především 0., 1. a 2. řádu (konstantní, lineární, kvadratická funkce)
c) Goniometrické funkce, především sinus, kosinus, tangens, kotangens (vztahy mezi goniometrickými funkcemi)
d) Exponenciální a logaritmické funkce, Eulerovo číslo
e) Lineárně lomená funkce (souřadnice průsečíku asymptot hyperboly)
f) Vlastnosti funkcí (definice funkce, definiční obor a obor hodnot, inverzní funkce, složená funkce, kartézský graf funkce, periodičnost, lichost, sudost, omezenost)

- Diferenciální počet

a) Limita funkce, spojitost funkce
b) Definice derivace funkce jedné proměnné, derivace elementárních funkcí
c) Derivace součinu a podílu funkcí, derivace složené funkce
d) Funkce více proměnných, parciální derivace, úplný diferenciál
e) Průběh funkce, Taylorův a Maclaurinův rozvoj funkce, diferenciální rovnice

- Integrální počet

a) Plocha omezená jednoduchým grafem funkce a geometrický výpočet velikosti plochy
b) Neurčitý integrál a primitivní funkce, určitý integrál
c) Integrace elementárních funkcí
d) Integrace per partes, integrace substitucí
e) Výpočty ploch, objemů a délek křivek užitím integrálního počtu

- Vektorový počet

a) Definice vektoru, souřadnice a velikost vektoru, jednotkový, opačný a nulový vektor
b) Operace s vektory - součet vektorů, násobení vektoru reálným číslem, skalární, vektorový a smíšený součin vektorů
c) Polohový vektor, jednotkové vektory souřadnicových os
d) Vektorová funkce a její derivace, derivace polohového vektoru podle času
e) Vektorová funkce a její integrace, integrace vektorové funkce zrychlení a vektorové funkce rychlosti podle času

- Analytická geometrie

a) Analytická geometrie přímky
b) Analytická geometrie kuželoseček

Kontrolní otázky:

1) Které objekty a stavy zkoumá nestatistická fyzika

2) Které objekty a stavy zkoumá statistická fyzika

3) Která z obou fyzik hraje rozhodující roli v radiologii

4) Co je to klasická dimenze nestatistické fyziky

5) Co je to kvantová dimenze nestatitické fyziky

6) Co je to relativistická dimenze nestatistické fyziky

7) Co je to pohybový zákon a pohybová rovnice

2. Klasická mechanika

Klíčová slova: Vymezení klasické mechaniky, Newtonovský formalismus, Zákony Zachování, Mechanický pohyb kmitavý, Mechanické vlnění

2.1. Vymezení klasické mechaniky

Mechanika zkoumá pohybové stavy a změny pohybových stavů, které souvisejí s mechanickým pohybem různých fyzikálních objektů - těles, skupin těles a různých druhů kontinua (např. kapaliny, plyny). Mechanický pohyb lze definovat jako změnu polohy fyzikálního objektu vůči jiným objektům s probíhajícím časem, mezi mechanické pohyby patří pohyb fyzikálního objektu jako celku, ale i uspořádané formy pohybu soustavy částic tvořících klasický nestatistický fyzikální objekt (např. zvukové nebo mechanické vlnění). Při zkoumání pohybových stavů a jejich změn bude započato se zkoumáním těchto fyzikálních jevů u hmotného bodu.

K přesnému určení polohy a pohybu zkoumaného tělesa si mechanika často vybírá myšlený bodový objekt, kterým nahrazuje těleso - **hmotný bod**. Při popisu pohybu tělesa je potřebné určit vztažné těleso, vzhledem k němuž je pak určována poloha. Spojením vztažného tělesa se soustavou pravoúhlých kartézských souřadnic lze získat **souřadnicovou vztažnou soustavu** s obvyklými osami x, y, z. **Polohu zkoumaného hmotného bodu je možné určit pomocí polohového vektoru** $\vec{r}$, který lze zapsat pomocí jednotkových vektorů $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ souřadnicových os x, y, z ve tvarech

$$\text{(B1)} \qquad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,, \quad \vec{r}\,(x,y,z),$$

kde x,y,z jsou souřadnice koncového bodu polohového vektoru $\vec{r}$ (počáteční bod leží vždy v počátku vztažné souřadnicové soustavy). Polohový vektor a jeho souřadnice x,y,z jsou funkcemi času a množina koncových bodů polohového vektoru vytváří **trajektorii hmotného bodu**.

Mechanika se člení na kinematiku a dynamiku. Kinematika zkoumá časový průběh pohybu hmotného bodu pomocí trajektorie, rychlosti a zrychlení hmotného bodu, dynamika zkoumá především síly jako příčiny pohybu hmotného bodu.

Kinematika ze znalosti polohového vektoru hmotného bodu jako funkce času

$$\text{(B2)} \qquad \vec{r} = \vec{r}\,(t)$$

(tj. ze znalosti **pohybového zákona**) může derivací polohového vektoru podle času t získat vztahy pro rychlost $\vec{v}$ a zrychlení $\vec{a}$ hmotného bodu (první derivace podle času je označena tečkou, druhá derivace podle času dvěma tečkami):

(B3) $\vec{v}\,(t) = \dot{\vec{r}}\,(t) = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j} + \dot{z}(t)\,\vec{k}$, tj. $\vec{v}\,(v_x, v_y, v_z)$

(B4) $\vec{a}\,(t) = \ddot{\vec{r}}\,(t) = \ddot{x}(t)\,\vec{i} + \ddot{y}(t)\,\vec{j} + \ddot{z}(t)\,\vec{k}$, tj. $\vec{a}\,(a_x, a_y, a_z)$.

Nechť je uvažován volný hmotný bod jako hmotný bod, který nemá geometrická omezení pohybu způsobená tzv. vazbami. Pak lze ze znalosti zrychlení prostřednictvím zákona síly jako součásti newtonovského formalismu napsat **pohybové rovnice** ve tvaru

(B5) $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ $(F_x = m\ \ddot{x},\ F_y = m\ \ddot{y},\ F_z = m\ \ddot{z})$.

Zatímco kinematika představuje s použitím diferenciálního počtu cestu od pohybového zákona k pohybovým rovnicím, dynamika je cestou opačnou - ze znalosti příčin pohybu (sil) vychází z pohybových rovnic (B5) a s použitím integrálního počtu získává pohybový zákon (B2). Pohybové rovnice ve tvaru (B5) jsou výrazem newtonovského formalismu, pro případ vázaného hmotného bodu by bylo zapotřebí využít formalismu lagrangeovského nebo hamiltonovského.

Základním pojmem dynamiky je pojem síly. Síly (v zjednodušené podobě jako vzájemné působení hmotných bodů, těles, polí) lze dělit na síly s deformačními účinky (statické účinky síly spojené se změnou tvaru) a na síly s translačními a rotačními účinky (dynamické účinky síly spojené se změnou polohy) nebo na síly vtištěné (síly fyzikálního původu) a síly vazbové (síly geometrického původu jako prostorová omezení pohybu) nebo také na síly vnější (mající původ v objektech nacházejících se mimo sledovanou soustavu hmotných bodů) a síly vnitřní.

2.2. Newtonovský formalismus klasické mechaniky

Základními formalismy mechaniky jsou formalismus lagrangeovský a hamiltonovský. V jednoduchých případech tyto formalismy přecházejí ve formalismus newtonovský daný vztahy (B1) pro pohybový zákon a (B5) pro pohybovou rovnici. Newtonovský formalismus kromě pohybové rovnice (B5), která se často nazývá 2. Newtonovým pohybovým zákonem, pracuje se zákonem setrvačnosti (1. Newtonův pohybový zákon) a zákonem akce a reakce (3. Newtonův pohybový zákon)

Např. pro vrh vodorovný lze obdržet 2. Newtonův pohybový zákon (B5) ve tvaru

$$0 = m\ \ddot{x},\quad -mg = m\ \ddot{y},\quad 0 = m\ \ddot{z}$$

Řešení pohybových rovnic povede po první integraci podle času a s uplatněním počátečních podmínek pro rychlost k vektoru rychlosti vodorovného vrhu

$$\vec{v}\,(t) = \dot{\vec{r}}\,(t) = v_0\,\vec{i} - gt\,\vec{j} + 0\vec{k},$$

po provedení druhé integrace podle času a s uplatněním počátečních podmínek pro polohový vektor bude získán pohybový zákon (B2) pro vodorovný vrh ve tvaru (B1)

$$\vec{r} = v_0 t\,\vec{i} - \frac{1}{2}gt^2\,\vec{j} + 0\,\vec{k}.$$

2.3. Zákony zachování jako integrály pohybových rovnic

2.3.1. Zákon zachování mechanické energie

Obvykle je zákon zachování mechanické energie uváděn pro izolovaný hmotný bod (nejsou přítomna ani vnější silové pole, ani působící okolní hmotné body) nebo pro volný hmotný bod nacházející se v konzervativním silovém poli (v konzervativním silovém poli je práce vykonaná po uzavřené křivce nulová). Oba popsané případy jsou spojeny se zachováním součtu kinetické energie T a potenciální energie V (tj. mechanické energie) hmotného bodu.

Jednoduše lze zákon zachování energie v homogenním tíhovém poli Země dokázat pomocí dráhových účinků síly působící na hmotný bod. Dráhové účinky síly jsou pak dány vykonanou prací W, která je při přechodu hmotného bodu např. volným pádem ze stavu 1 s rychlostí v_1 do stavu 2 s rychlostí v_2 určena tzv. dráhovým integrálem síly

$$W = \int_1^2 \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{v_1}^{v_2} mv\mathrm{d}v = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_1}^{v_2} = T_2 - T_1.$$

Dráhový integrál síly je tedy roven změně kinetické energie mezi stavy 1 a 2 určenými příslušnými polohovými vektory a rychlostmi hmotného bodu neboli mechanické práci síly mezi těmito stavy. Ve zkoumaném jednoduchém případě je s růstem kinetické energie spojen pokles potenciální energie

$$W = \int_1^2 \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{h_1}^{h_2} -mg\mathrm{d}h = \left[-mgh\right]_{h_1}^{h_2} = V_1 - V_2.$$

Odtud již vyplývá zákon zachování mechanické energie vyjádřený rovností hodnot mechanické energie v popsaných stavech 1 a 2.

2.3.2. Další zákony zachování, počet integrálů pohybových rovnic

Vedle dráhových účinků má síla také časové účinky. Časové účinky síly lze popsat pomocí časového integrálu síly, jehož dolní mez t_1 vyjadřuje okamžik, kdy síla začala na hmotný bod (těleso) působit při jeho hybnosti $\vec{p}(t_1) = \vec{p}_1$, zatímco horní mez t_2 vyjadřuje okamžik ukončení silového působení při hybnosti $\vec{p}(t_2) = \vec{p}_2$. Časový integrál síly (nazývaný také impulsem síly) lze pak zapsat

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1.$$

Je-li impuls síly $\vec{I}$ roven nulovému vektoru, pak platí zákon zachování hybnosti $\vec{p}$ hmotného bodu. Obecně lze pomocí lagrangeovského a hamiltonovského formalismu ukázat, že zákon zachování hybnosti je důsledkem „homogenity prostoru“ (zkoumané vlastnosti nezávisejí na posunutí v prostoru).

Mezi další důležité zákony zachování patří zákon zachování momentu hybnosti hmotného bodu. Moment hybnosti (vzhledem k zvolenému pevnému bodu) $\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p}$, který je roven vektorovému součinu polohového vektoru hmotného bodu a hybnosti hmotného bodu, je svázán s vektorem momentu síly $\vec{M}$ (vzhledem k témuž pevnému bodu) vztahem

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}.$$

Je-li působící moment síly $\vec{M}$ roven nulovému vektoru, moment hybnosti $\vec{b}$ se zachovává.

Nejen pro hmotný bod, ale i pro izolovanou soustavu hmotných bodů platí, že taková soustava má celkem 7 aditivních pohybových integrálů - energii vyjádřenou Hamiltonovou funkcí *H*, hybnost $\vec{p}$ a moment hybnosti $\vec{b}$.

2.4. Mechanický kmitavý pohyb oscilátoru

2.4.1. Obecný a periodický pohyb kmitavý

Kmitavý pohyb je pohyb, při němž hmotný bod zachovává konečnou vzdálenost od své rovnovážné polohy. Hmotný bod, který koná pohyb kmitavý se nazývá oscilátor. Periodický kmitavý pohyb je pohyb s periodickým opakováním svého průběhu - jeden stále se opakující průběh se nazývá kmit. S periodickým kmitáním jsou spojeny obvyklé pojmy doby kmitu *T* a frekvence ν kmitavého pohybu jako počet kmitů za 1 s. Platí známý vztah

$$\text{(B9)} \qquad T = \frac{1}{\nu}.$$

Kmitá-li oscilátor po přímce, jde o lineární kmitavý pohyb. Obvykle bude zkoumán právě lineární kmitavý pohyb, jehož kmitání se bude z hlediska obvyklé volby kartézské souřadnicové soustavy odehrávat v ose y, rovnovážnou polohu pak lze spojit s počátkem souřadnicové soustavy. Okamžitá vzdálenost od rovnovážné polohy je okamžitá výchylka *y*, maximální okamžitá výchylka je amplituda *A*.

2.4.2. Rovnoměrný pohyb kruhový, harmonický pohyb kmitavý

Harmonický pohyb kmitavý hmotného bodu je úzce spojen s rovnoměrným pohybem kruhovým hmotného bodu se stejnou hmotností *m*. Při rovnoměrném pohybu kruhovém (střed kružnice splývá s počátkem souřadnicové soustavy) kolmé průměty okamžitých poloh hmotného bodu na osu y konají kmitavý pohyb, který je harmonickým pohybem kmitavým. Jelikož s rovnoměrným pohybem kruhovým je spojen pojem úhlové frekvence (úhlové rychlosti) ω jako úhlu, který polohový vektor hmotného bodu opíše za 1 s, je tato fyzikální veličina použita také při popisu harmonického pohybu kmitavého. Úhlová frekvence ω je spojena s frekvencí ν vztahem

$$\text{(B10)} \qquad \omega = 2\pi\nu.$$

Obvodová rychlost v rovnoměrného pohybu kruhového po kružnici o poloměru r (r je také velikost polohového vektoru), dostředivé zrychlení a_n (tečné zrychlení a_τ je nulové, neboť velikost vektoru rychlosti se nemění) a dostředivá síla F_n jsou dány vztahy ve skalární a vektorové podobě

$$\text{(B11)} \qquad v = \omega r,\ \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\ ,\ a_n = \omega^2 r = \omega v,\ \overrightarrow{a_n} = \vec{\omega} \times \vec{v}\ ,\ F_n = m\ a_n\ ,\ \overrightarrow{F_n} = m\overrightarrow{a_n}\ .$$

2.4.3. Dynamický a kinematický popis harmonického pohybu kmitavého

Dynamickou příčinou harmonického pohybu kmitavého v ose y je síla F, jejíž velikost je přímo úměrná okamžité výchylce y oscilátoru a směřuje vždy do rovnovážné polohy. Působením této síly vzniká vlastní kmitání harmonického oscilátoru a je s ní spojena také potenciální energie oscilátoru V. Pro sílu F a potenciální energii V platí vztahy

$$\text{(B12)} \qquad F = -Ky,\ V = \frac{1}{2} Ky^2.$$

Užitím newtonovského formalismu lze snadno dospět k pohybové rovnici harmonického oscilátoru. Pak lze obdržet hledanou pohybovou rovnici vlastních kmitů harmonického oscilátoru ve tvaru

$$\text{(B13)} \qquad -Ky = m\ \ddot{y}\ .$$

Řešením této pohybové rovnice je pohybový zákon (B2), vztah pro rychlost (B3), pro zrychlení (B4) a hodnota konstanty K harmonického oscilátoru, vše ve tvarech

$$\text{(B14)} \qquad y = A \sin(\omega t + \varphi_0),\ v = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0),\ a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y,$$
$$K = m\omega^2.$$

Úhel $\varphi = \omega t + \varphi_0$ je fáze harmonického pohybu kmitavého, úhel φ_0 je počáteční fáze. Amplitudy rychlosti a zrychlení jsou zřejmé ze vztahů (B14). Ze vztahů (B14) a (B12) je také vidět, že celková energie

$$T + V = {}^1\!/_2\ m\omega^2 A^2.$$

Jelikož jde o konstantu, celková energie je pro vlastní harmonické kmitání integrálem pohybových rovnic.

2.4.4. Skládání harmonických kmitů

Při zkoumání dvou harmonických kmitů s okamžitými výchylkami y_1 a y_2 je výsledná okamžitá výchylka $y = y_1 + y_2$ okamžitou výchylkou výsledného harmonického kmitu, který vznikl složením dílčích kmitů. Rozdíl fází $\varphi_1 - \varphi_2$ dílčích kmitů se nazývá fázovým rozdílem $\Delta\varphi$.

Dále budou studovány dva navzájem kolmé harmonické kmity (jeden se bude odehrávat v ose x, druhý v ose y) se stejnými amplitudami a úhlovými frekvencemi (tj. s poměrem frekvencí $\nu_1 : \nu_2 = 1:1$), dané podle (B14) pohybovými zákony

$$x = A \sin \omega t, \quad y = A \sin (\omega t + \varphi_0) \text{ a fázovým rozdílem } \Delta\varphi = \varphi_0.$$

Snadnou úpravou s využitím vztahů mezi goniometrickými funkcemi lze získat tvar trajektorie výsledného složeného kmitu ve tvaru

$$y^2 - 2xy \cos \varphi_0 + x^2 = A^2 \sin^2\varphi_0.$$

Analýza fázového rozdílu vede pro poměr frekvencí $\nu_1 : \nu_2 = 1:1$ ke zjištění tvarů nejjednodušších tzv. Lissajousových obrazců:

$\varphi_0 = 0^o, 180^o$ - harmonické kmitání v přímce půlící úhel obou dílčích kmitů

$\varphi_0 = 90^o, 270^o$ - kruhové kmity pravotočivé (ve smyslu pohybu hodinových ručiček) a levotočivé (v opačném smyslu)

$\varphi_0 \in (90^o, 180^o)$ nebo $(180^o, 270^o)$ - eliptické kmity s hlavní osou v ose druhého a čtvrtého kvadrantu pravotočivé a levotočivé

$\varphi_0 \in (0^o, 90^o)$ nebo $(270^o, 360^o)$ - eliptické kmity s hlavní osou v ose prvního a třetího kvadrantu pravotočivé a levotočivé

2.4.5. Tlumený a nucený pohyb kmitavý

Vlivem třecích sil a odporu prostředí se amplituda kmitání zmenšuje - pak lze hovořit o tlumeném kmitání. Při pohybu v odporujícím prostředí (opět je uvažováno kmitání v ose y) je odporová síla R často úměrná rychlosti $\dot{y}$, má však opačný směr. Odtud plyne pro odporovou sílu vztah $R = -2bm\dot{y}$, kde $2bm$ je konstanta úměrnosti a b se nazývá konstanta útlumu. S použitím newtonovského formalismu lze zapsat pohybovou rovnici (B5) pro tlumené kmitání ve tvaru

$$\text{(B15)} \qquad -Ky - 2bm\dot{y} = m\ddot{y}.$$

Rovnice (B15) je diferenciální rovnice, která je lineární, homogenní, 2. řádu a s konstantními koeficienty. Řešení rovnice (B15) vede za podmínky $b < \omega$ (ω je úhlová frekvence vlastního kmitání) k nalezení okamžité výchylky y tlumeného kmitání jako funkce času ve tvaru

$$y = A\, e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \varphi_0), \quad \text{kde } \omega_1 = (\omega^2 - b^2)^{1/2}.$$

Člen $A e^{-bt}$ představuje stále se s časem zmenšující amplitudu tlumeného kmitání. Kdyby byla konstanta útlumu $b > \omega$, nevznikly by žádné reálné kmity - takovému pohybu se říká pohyb aperiodický.

Jestliže při reálném kmitání nepůsobí na oscilátor vnější síly, kmitání vlivem tlumení časem zanikne. Periodický kmitavý pohyb, který může konat oscilátor vlivem působení vnější periodicky časově proměnné síly libovolně dlouho, je nuceným kmitáním. Vnější periodicky časová síla se nazývá budící silou F_v, vynucuje časově neomezené periodické kmitání (tzv. nucené kmitání) a je dána v nejjednodušším případě vztahem $F_v = F_0 \sin \Omega\, t$ (F_0 je amplituda budící síly, Ω je její úhlová frekvence). S použitím newtonovského formalismu lze zapsat pohybovou rovnici (B5) pro nucené kmitání ve tvaru

$$\text{(B16)} \qquad -Ky - 2bm\dot{y} + F_0 \sin \Omega\, t = m\, \ddot{y}\ .$$

Rovnice (B16) je diferenciální rovnice, která je lineární, nehomogenní, 2. řádu a s konstantními koeficienty. Řešení rovnice (B16) vede za podmínky $b < \omega$ (ω je úhlová frekvence vlastního kmitání) k nalezení okamžité výchylky y nuceného kmitání jako funkce času ve tvaru

$$y = A\, e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + A_v \sin(\Omega\, t + \gamma)\,, \quad \text{kde } \omega_1 = (\omega^2 - b^2)^{1/2}.$$

Tvar řešení naznačuje, že první člen $A\, e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \varphi_0)$ popisuje obvyklé tlumené kmitání. Tlumené kmitání časem zanikne a zůstanou jen nucené kmity $y = A_v \sin(\Omega\, t + \gamma)$ s amplitudou A_v, jejichž úhlová frekvence Ω je rovna úhlové frekvenci budící síly F_v. Po dosazení okamžité výchylky y zbylých nucených kmitů do původní pohybové rovnice (B16) je možné vypočítat jak amplitudu A_v nucených kmitů, tak fázový rozdíl $\Delta\varphi = \gamma$ mezi budící silou a nucenými kmity. Např. pro amplitudu A_v lze získat vztah

$$A_v = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4b^2\Omega^2}}\ .$$

Získaný vztah ukazuje, že amplituda A_v nucených kmitů je maximální při takové úhlové frekvenci Ω budící síly F_v, při níž má jmenovatel zlomku minimální hodnotu. Stačí tedy položit derivaci výrazu pod odmocninou podle Ω rovnu nule. Řešením takto získané rovnice lze získat hledanou hodnotu úhlové frekvence Ω ve tvaru

$$\Omega = (\omega^2 - 2b^2)^{1/2},$$

který při malé hodnotě konstanty útlumu b vede ke známé podmínce rezonance $\Omega = \omega$ mezi vlastními kmity a budící silou.

2.5. Mechanické vlnění

2.5.1. Druhy vlnění, interference vlnění, vlnová délka

Mechanické vlnění je děj, při němž se kmitání šíří látkovým prostředím složeným z obrovského počtu oscilátorů - hmotných bodů. Mezi oscilátory existuje vazba, která umožňuje přenos nuceného kmitání jednoho oscilátoru postupně na oscilátory další. Oscilátory se nepřemísťují v prostoru, jen kmitají kolem rovnovážných poloh (opět budou uvažovány okamžité výchylky y jednotlivých oscilátorů pouze ve směrech rovnoběžných s osou y). Zdrojem vlnění je oscilátor - hmotný bod, z něhož se vlnění šíří. Druhy vlnění jsou vlny postupné příčné a postupné podélné, vlny stojaté příčné a stojaté podélné.

Jestliže postupují látkovým prostředím dvě nebo více vlnění, pak dochází k jejich skládání neboli interferenci. Např. stojaté vlnění vzniká interferencí vlnění o stejné amplitudě a frekvenci, která postupují proti sobě.

Vlnová délka λ je vzdálenost, do které se rozšíří vlnění v řadě bodové za dobu kmitu T. Bude-li v označovat rychlost šíření vlnění, pak pro vlnovou délku λ lze napsat s použitím (B9) vztahy

$$\text{(B17)} \qquad \lambda = vT = v / \nu .$$

2.5.2. Kinematický a dynamický popis mechanického vlnění

Dále bude zkoumáno vlnění šířící se množinou oscilátorů tvořících řadu bodovou, řada bodová bude ztotožněna se souřadnicovou osou x, zdroj vlnění bude umístěn v počátku souřadnicové soustavy a jednotlivé oscilátory řady bodové budou kmitat harmonicky na základě vztahů (B14). Pohybový zákon (B14) pro okamžitou výchylku jednoho oscilátoru vyjadřoval funkční závislost jen na čase t. Pro případ množiny oscilátorů tvořících osu x bude nutné včlenit do pohybového zákona (do vztahu pro okamžitou výchylku) také závislost na souřadnici x, která bude charakterizovat konkrétní oscilátor z dané množiny oscilátorů. Jelikož se kmitání rozšíří do vzdálenosti x za čas x/v, kde v je rychlost šíření vlnění, bude možné pohybový zákon (okamžitou výchylku) postupného vlnění šířícího se kladnou poloosou osy x napsat s použitím (B10), (B14) a (B17) ve tvarech

$$\text{(B18)} \qquad y = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Při šíření v opačném směru se změní jen znaménko – na znaménko +. Pohybový zákon (B18) se nazývá **vlnová funkce**.

Při přechodu od kinematiky vlnění (viz vlnová funkce (B18)) k dynamice vlnění je nutno přihlížet také k příčinám vlnění, tj. k souvislosti vlnění se silami, jimiž se vlnění řadovou bodovou (osou x) přenáší. S využitím newtonovského formalismu bude sestavena pohybová rovnice zkoumaného vlnění tak, aby byla splněna po dosazení vlnové funkce (B18). Taková pohybová rovnice vlnění se nazývá **vlnovou rovnicí** a má tvar

$$\text{(B19)} \qquad v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} .$$

Po srovnání vlnové rovnice (B19) se zjednodušeným tvarem $F=ma$ zákona síly (B5) lze učinit následující závěry:

- na pravé straně vlnové rovnice je **okamžité zrychlení** jednoho oscilátoru řady bodové (obecněji: **okamžité zrychlení** objemového elementu rozvlněného prostředí)

- levá strana má podle zákona síly **význam podílu síly** působící v jednotlivých místech řady bodové na oscilátor a hmotnosti oscilátoru (obecněji: **význam podílu síly** působící v jednotlivých místech rozvlněného prostředí na objemový prvek a hmotnosti objemového prvku). Levá strana se číselně rovná síle působící na prvek s jednotkovou hmotností

- dosazením vlnové funkce (B18) do vlnové rovnice (B19) lze zjistit, že vlnová funkce splňuje vlnovou rovnici.

Na závěr kinematického a dynamického popisu mechanického vlnění lze učinit zobecnění tvaru vlnové rovnice (B19) na libovolné šíření prostorem (nikoliv pouze řadou bodovou) zavedením obecného označení vlnové funkce písmenem řecké abecedy ψ a Laplaceova operátoru Δ

$$\text{(B20)} \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Pak lze vlnovou rovnici (B19) přepsat s použitím (B20) ve tvaru

$$\text{(B21)} \qquad \Delta\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0.$$

2.5.3. Zvuk, ultrazvuk

Zvuk je nejen sluchový vjem, ale i vnější příčina sluchového vjemu - uspořádaný pohyb molekul látky (tedy i vzduchu), který se jako postupná podélná i příčná vlna (zvuková vlna) přenáší působením sil, kterými na sebe molekuly působí. Frekvence zvukových vln je v rozmezí 16 Hz až 20 kHz. Zdroje zvukových vln jsou tělesa, ve kterých vzniká chvění jako stojaté příčné nebo stojaté podélné vlnění. Např. tyč délky l upnutá uprostřed a podélně rozechvěná vydává základní zvuk o frekvenci $\nu = v / 2l$. Kmitající konec tyče funguje jako zdroj zvukového vlnění šířícího se do okolního prostředí. Čím kratší je tyč, tím vyšší je frekvence. Při jisté délce tyče dojde k přechodu z oboru slyšitelných zvuků do oboru ultrazvuku (např. při rychlosti šíření zvuku v tyči $v = 5.10^3$ m.s^{-1} bude překročena frekvence 20 kHz při délce tyče 0,125 m).

Ultrazvuk je lidským uchem neslyšitelný zvuk s frekvencí větší než 20 kHz. K buzení ultrazvukových vln se používá místo mechanického podélného rozkmitání tyčí jevu magnetostrikčního nebo piezoelektrického.

Magnetostrikční jev spočívá v tom, že některé feromagnetické látky (např. ve tvaru tyče) se ve střídavém elektromagnetickém poli periodicky zkracují a prodlužují. Nelze sice dosáhnout příliš vysokých frekvencí (asi do 90 kHz, pak je již tyč rezonující se střídavým elektromagnetickým polem příliš krátká), ale lze získat značné intenzity ultrazvuku přesahující 200 W.cm^{-2} (intenzita zvuku od rádia nastaveného na normální poslech je 10^{-9} W.cm^{-2}). Intenzita ultrazvuku je energie ultrazvukového vlnění, která projde za 1 s jednotkovou plochou, jednotková plocha se obvykle volí cm^2.

Přímý piezoelektrický jev vzniká u krystalů, které nejsou středově souměrné (např. u krystalu křemene nebo titaničitu barnatého) Je-li podrobena vhodně vyříznutá destička v jistých směrech tahu nebo tlaku, destička i molekuly krystalu se deformují, změní se poloha nábojů a tak vzniknou podobně jako u polarizace dielektrika opačné povrchové náboje na protilehlých plochách destičky. Mezi protilehlými plochami vzniká piezoelektrické napětí.

Obrácený piezoelektrický jev se objevuje při opačném postupu - je-li vložen na protilehlé plochy destičky potenciálový rozdíl, destička se deformuje. Je-li vloženo na protilehlé plochy destičky střídavé elektrické napětí, destička se rozkmitá a stává se zdrojem ultrazvuku. S využitím vyšších harmonických kmitů základního kmitání destičky lze dosáhnout frekvence až 10^6 kHz a intenzit kolem 50 W.cm^{-2}.

Ultrazvukové vlny jsou příliš krátké, proto se šíří prakticky přímočaře a odrážejí se podle rovnosti úhlu dopadu a úhlu odrazu. Značně se zeslabují ve vzduchu a v plynech, podstatně méně v kapalinách a pevných látkách. S využitím Dopplerova jevu lze z rozdílu frekvence ultrazvukové vlny dopadající na pohybující se rozhraní a odražené od pohybujícího se rozhraní zjistit rychlost pohybu rozhraní.

Kontrolní otázky:

1) Jakými podmínkami lze vymezit klasickou fyziku
2) Jaký je tvar pohybového zákona
3) Jaký je tvar pohybové rovnice
4) Popište Newtonovský formalismus
5) Co jsou to integrály pohybových rovnic
6) Popište 7 integrálů pohybových rovnic jako zákony zachování
7) Popište pohybovou rovnici pro harmonický pohyb kmitavý vlastní, tlumený a nucený
8) Popište pohybový zákon pro harmonický pohyb kmitavý vlastní, tlumený a nucený
9) Popište skládání dvou kolmých harmonických pohybů kmitavých
10) Nalezněte podmínku rezonance pro nucený pohyb kmitavý
11) Popište pohybový zákon pro mechanické vlnění
12) Popište pohybovou rovnici pro mechanické vlnění
13) Co je to Laplaceův operátor
14) Co je to ultrazvuk
15) Co je podstatou piezoelektrického jevu

3. Klasické aplikace elektromagnetického pole

Klíčová slova: Klasicky pojaté elektromagnetické pole, Klasický náboj v elektrickém poli, Klasický náboj v magnetickém poli, Maxwellovy rovnice, Monochromatická elektromagnetická vlna

3.1. Elektromagnetické pole jako klasický a nestatisticky pojatý fyzikální objekt

Východiska klasické nestatistické fyziky spočívají v **nekvantové aproximaci** a v **nerelativistické aproximaci** jevů, které jsou spojeny s nestatisticky pojatým fyzikálním objektem. **Proto je zapotřebí hledat podmínky, za jejichž platnosti lze elektromagnetické pole považovat za klasický a nestatistický fyzikální objekt.** Tyto podmínky by měly vymezit, kdy lze kvantový pohled daný vlnově korpuskulárním dualismem redukovat na klasický pohled daný preferencí pouze jedné stránky dualismu a kdy lze opustit relativistické efekty spojené s jinými objekty, které s elektromagnetickým polem mohou interagovat. Současně je zapotřebí uvést hledané podmínky do souladu s často používaným pojmem „elektromagnetické záření".

První podmínku lze formulovat jako přítomnost elektromagnetického pole v „rozlehlém" prostoru bez přítomnosti nábojů. Takové elektromagnetické pole se nazývá **volným elektromagnetickým polem** a při jeho zkoumání se stačí omezit jen na vlnovou stránku vlnově korpuskulárního dualismu - pole se šíří prostorem (např. vakuem nebo dielektrikem) jako **monochromatická elektromagnetická vlna** s jistou úhlovou frekvencí ω a s fázovou rychlostí rovnou rychlosti světla c. Rovněž elektromagnetické záření je za této podmínky elektromagnetickým vlněním.

Druhou podmínku lze tedy formulovat jako případy **obrovských počtů koherentních fotonů** s úhlovou frekvencí ω. Pak lze přejít od reprezentace dílčího fotonu „vlnovým balíkem" či „Gaussiánem" s energií $\hbar\omega$ k elektromagnetické vlně v „rozlehlém" prostoru, v němž nejsou náboje a v němž je energie rozložena spojitě. Tato elektromagnetická vlna již reprezentuje intenzitu $\vec{E}$ makroskopického elektrického pole a magnetickou indukci $\vec{B}$ makroskopického magnetického pole a chová se jako „klasická" vlna a jako jeden nestatistický fyzikální objekt, byť má tato „klasická" vlna fázovou rychlost šíření rovnu rychlosti světla.

Elektromagnetické pole a elektromagnetické záření lze považovat za klasický a nestatistický fyzikální objekt za následujících dvou podmínek:

a) obrovské počty fotonů (pak lze přejít k monochromatické elektromagnetické vlně, která reprezentuje intenzitu $\vec{E}$ makroskopického elektrického pole a magnetickou indukci $\vec{B}$ makroskopického magnetického pole)

b) velké vzdálenosti od soustavy nábojů (pak lze elektromagnetické pole považovat za volné a šířící se prostorem opět jako monochromatické elektromagnetické vlnění).

3.2. Pohyb klasického náboje v konstantním elektromagnetickém poli

3.2.1. Pohybová rovnice, elektromagnetická síla

Konstantní elektromagnetické pole je pole, které nezávisí na čase. Klasický náboj je nabitá částice pohybující se nerelativistickými rychlostmi po obvyklých trajektoriích.

Souhrnný tvar pro pohybové rovnice klasického náboje v konstantním elektromagnetickém poli lze získat ve tvaru

$$\text{(B23)} \qquad m\ddot{\vec{r}} = Q.\vec{E} + Q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Po srovnání se zákonem síly (B5) **lze vidět, že zkoumané elektromagnetické pole působí na náboj elektromagnetickou silou** $\overrightarrow{F_{elmg}}$ **(tzv. Lorentzova síla),** která je složena z elektrické síly $\overrightarrow{F_{el}}$ a magnetické síly $\overrightarrow{F_{mg}}$ (viz Dodatek 5, Příklad 1):

$$\text{(B24)} \qquad \overrightarrow{F_{elmg}} = \overrightarrow{F_{el}} + \overrightarrow{F_{mg}} = Q.\vec{E} + Q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right).$$

Konstantní elektromagnetické pole bude dále zkoumáno odděleně jako homogenní elektrické pole a homogenní magnetické pole.

3.2.2. Příčné a podélné homogenní elektrické pole

Rychlost náboje nechť má směr osy x a konstantní velikost při vniknutí do homogenního elektrického pole např. mezi deskami kondenzátoru. Osa x nechť má počátek v místě vniknutí náboje. Magnetické pole je nulové a intenzita elektrického pole s konstantní velikostí má směr osy y. Počáteční podmínky pak budou $\vec{v}$ (v_0, 0,0), $\vec{r}$ (0,0,0), $\vec{E}$ (0,E,0), $\vec{B}$ (0,0,0).

Po dosazení do (B23) budou získány pohybové rovnice ve tvaru

$$m\ddot{x} = 0,\ m\ddot{y} = Q.E,\ m\ddot{z} = 0.$$

Řešením pohybových rovnic bude získán pohybový zákon (B2) ve tvaru

$$x = v_0\,t,\ y = \frac{QE}{2m}t^2,\ z = 0.$$

Náboj se pohybuje po parabole s vrcholem v počátku (podrobné odvození viz uvedená literatura). **Pro podélné homogenní elektrické pole** lze nalézt podrobné odvození v uvedené literatuře.

3.2.3. Homogenní magnetické pole

Homogenní a konstantní magnetické pole bude mít magnetickou indukci $\vec{B}$ (0,0,B), elektrické pole intenzitu $\vec{E}$ (0,0,0). Počáteční podmínky pohybu náboje jsou $\vec{v}$ (0,v_0,0), $\vec{r}$ (0,0,0).

Pak lze obdržet pohybové rovnice ve tvaru

$$m\ddot{x} - \frac{Q}{2}B\dot{y} - \frac{Q}{2}B\dot{y} = 0\,, \quad m\ddot{y} + \frac{Q}{2}B\dot{x} + \frac{Q}{2}B\dot{x} = 0\,, \quad m\ddot{z} = 0.$$

Užitím počátečních podmínek a zavedením $\omega = {}^{QB}\!/_{m}$ lze první dvě pohybové rovnice získat v jednoduchém tvaru $\ddot{x} = \omega\,\dot{y}$, $\ddot{y} = -\,\omega\,\dot{x}$ (viz uvedená literatura).

Trajektorie je pak kružnice v souřadnicové rovině os x a y o poloměru

$$r = \frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{QB} \quad \text{(viz uvedená literatura).}$$

3.3. Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole

Na základě zavedení intenzity elektrického pole $\vec{E}$ a indukce magnetického pole $\vec{B}$ lze odvodit čtyři Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole pro zřídla a víry elektrického a magnetického pole. Teoretické odvození je matematicky náročné, proto bude při výběru zřídel a vírů elektromagnetického pole použita fenomenologická Maxwellova teorie elektromagnetického pole.

3.3.1. Maxwellova teorie elektromagnetického pole, zřídla a víry pole

Maxwellova teorie elektromagnetického pole (uveřejněná již v r. 1873) **byla teorií makroskopickou,** která popisovala elektromagnetické pole vzbuzené makroskopicky rozloženými náboji a makroskopickými proudy bez přihlédnutí k jejich mikroskopické struktuře. Proto tato teorie mohla náboj i proud považovat za spojitě rozložené a zavést hustotu náboje ρ, hustotu vodivého proudu $\vec{i}$ (vodivý proud je spojen s uspořádaným pohybem volných nábojů) a také hustotu Maxwellova proudu

$$\varepsilon_0\varepsilon_r\, {}^{\partial\vec{E}}\!/_{\partial t} \quad (\varepsilon_0 \text{ je absolutní permitivita a } \varepsilon_r \text{ relativní permitivita prostředí).}$$

Maxwellův proud je pokračováním vodivého proudu v izolantu, relativní permitivita ε_r vyjadřuje známým způsobem vliv prostředí na elektrické pole. Obdobně je s absolutní permeabilitou μ_0 spojena relativní permeabilita μ_r, která vyjadřuje vliv prostředí namagnetické pole. Propojení vodivého proudu a Maxwellova proudu je potvrzením Maxwellovy hypotézy, že všechny elektrické proudy jsou uzavřené.

Z hlediska mikroskopického pojetí struktury náboje i vodivého a Maxwellova proudu přestávají materiálové konstanty „relativní permitivita“ a „relativní permeabilita“ hrát svou roli. Rovnice elektromagnetického pole vycházející z mikroskopického pojetí se pak nazývají Lorentzovy-Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole.

Východiskem pro uvedení Maxwellových rovnic bude výběr zřídel a vírů elektromagnetického pole na základě fenomenologické Maxwellovy teorie elektromagnetického pole a jejich popis prostřednictvím operátorů divergence (div) a rotace (rot). Hledání zřídel a vírů elektromagnetického pole je hledání míst, která jsou zdrojem „změn“ stavu pole.

3.3.2. Matematický popis zřídel a vírů a jejich výběr

Matematický popis zřídel a vírů lze uskutečnit pomocí operátorů div a rot. Pro zavedení matematických instrukcí (které jsou podstatou každého operátoru) bude vhodné zavést symbolický vektor „nabla“ ∇, jehož složky mají charakter vektorových instrukcí:

$$\text{(B25)} \qquad \nabla = \nabla\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Bude-li tento symbolický vektor spojen s vektorem stojícím napravo od něj skalárním součinem, bude jeho aplikace nazvána divergencí a označena div. Bude-li tento symbolický vektor spojen s vektorem stojícím napravo od něj vektorovým součinem, bude jeho aplikace nazvána rotací a označena rot. Odtud plyne např. aplikace nabla na vektor $\vec{E}$ (E_x, E_y, E_z):

$$\text{(B26)} \quad \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{rot}\vec{E}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

Zřídla lze hledat u všech silových polí zjednodušeně řečeno jako místa, z nichž vycházejí nebo do nichž vcházejí otevřené silokřivky příslušného pole. **Víry** si pak lze představit jako místa, která jsou „obkroužena“ uzavřenými silokřivkami.

Při aplikaci představy zřídel a vírů na elektromagnetické pole je zřejmé, že existence elektrického náboje směřuje ke zřídlovosti elektrického pole a neexistence magnetického náboje k nezřídlovosti magnetického pole. Elektrické siločáry mohou být otevřenými křivkami, jestliže vycházejí z náboje nebo do náboje vcházejí. Zřídlo elektrického pole pak bude možné popsat hustotou ρ elektrického náboje. Indukční čáry magnetického pole jsou naopak vždy uzavřenými křivkami - magnetické pole nebude mít zřídla.

Odlišná je situace u vírů elektromagnetického pole. Existuje elektrické pole charakterizované uzavřenými elektrickými siločarami a spojené s jevem elektromagnetické indukce - lze tedy vyvodit, že vírem elektrického pole bude proměnné magnetické pole. Proměnnost magnetického pole lze zachytit nenulovostí parciální derivace magnetické indukce podle času, tj. nenulovostí výrazu $\partial\vec{B}/\partial t$. Magnetické pole se objeví, dá-li se náboj do pohybu. Víry magnetického pole budou proto spojeny s hustotou $\vec{i}$ vodivého proudu a s hustotou $\varepsilon_0\varepsilon_r\, \partial\vec{E}/\partial t$

Maxwellova proudu. Vodivý proud je spojen s pohybem volných nábojů, Maxwellův proud s pohybem vázaných nábojů (s polarizací dielektrika).

3.3.3. Formulace soustavy Maxwellových rovnic

Na základě matematického popisu zřídel a vírů polí pomocí (B25) a (B26) a na základě provedené analýzy zřídlovosti a vírovosti elektrického a magnetického pole lze přistoupit k formulaci Maxwellových rovnic ($\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$, $\mu=\mu_0\mu_r$):

(B27) $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$ (zřídlem elektrického pole je elektrický náboj)

(B28) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ (magnetické pole je nezřídlové)

(B29) $\operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (vírem elektrického pole je proměnné magnetické pole)

(B30) $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{i} + \varepsilon\mu \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (víry magnetického pole jsou vodivý a Maxwellův proud).

Maxwellovy rovnice platí pro popis statických, stacionárních a kvazistacionárních stavů elektromagnetického pole. Při popisu nestacionárních stavů je omezující podmínkou předpoklad platnosti Maxwellových rovnic - rychlosti nábojů jsou malé ve srovnání s rychlostí světla. Následující popis statických, stacionárních, kvazistacionárních a nestacionárních stavů elektromagnetického pole má jen přibližnou platnost.

Statické stavy elektromagnetického pole (elektrostatické pole, magnetické pole neexistuje) jsou spojeny s nepohyblivými náboji, Maxwellovy rovnice mají tvary

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon},\ \operatorname{div} \vec{B} = 0,\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0,\ \operatorname{rot} \vec{B} = 0$$ (viz uvedená literatura).

Stacionární stavy elektromagnetického pole jsou spojeny se stacionárním pohybem náboje, tj. s ustáleným pohybem v jednom směru, a tedy se stejnosměrným proudem. Objevuje se magnetické pole a často je lze společně s jen zřídlovým elektrickým polem považovat za konstantní elektromagnetické pole. Maxwellovy rovnice mají tvary

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon},\ \operatorname{div} \vec{B} = 0,\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0,\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{i}\,.$$

Kvazistacionární stavy elektromagnetického pole jsou spojeny s pomalými změnami směru pohybu náboje, tj. s nízkofrekvenčním střídavým proudem (změny proudu mají charakter elektromagnetických oscilací např. v rámci *RLC* obvodu). Změny v čase jsou natolik pomalé, že se stačí ustavovat rozložení nábojů odpovídající rovnovážným stavům. Vedle zřídlového elektrického pole se objevuje i jeho vírová varianta a s ní i řada technických aplikací (např. ve spojení se zákonem elektromagnetické indukce generátory elektrického proudu a elektromotory). Maxwellovy rovnice mají tvary

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon},\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0,\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\ \mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu\,\vec{i}\ .$$

Nestacionární stavy elektromagnetického pole jsou spojeny s rychlými změnami směru pohybu náboje, tj. s vysokofrekvenčním střídavým proudem. Vedle zřídlového a vírového elektrického pole se uplatňují oba víry magnetického pole. Maxwellovy rovnice mají tvary dané (B27), (B28) , (B29), (B30).

3.4. Elektromagnetické vlnění

3.4.1. Maxwellovy rovnice pro volné elektromagnetické pole

Podmínky pro pojetí elektromagnetického pole jako klasického a nestatistického fyzikálního objektu byly spojeny s podmínkami volného elektromagnetického pole a obrovského počtu koherentních fotonů. Podmínka volného elektromagnetického pole znamená nepřítomnost volných nábojů a výskyt pole v prostředí, které je buď vakuem nebo neferomagnetickým dielektrikem. Pro volné elektromagnetické pole budou mít v dielektriku Maxwellovy rovnice tvar

$$\text{(B31)}\qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = 0,\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0,\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\ \mathrm{rot}\,\vec{B} = \varepsilon\mu\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\ .$$

Ve vakuu se tvar (B31) změní na základě odstranění materiálových konstant:

$$\text{(B32)}\qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = 0,\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0,\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\ \mathrm{rot}\,\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\ .$$

3.4.2. Monochromatická elektromagnetická vlna

Zřejmě nejdůležitějším klasickým rysem elektromagnetického pole je šíření volného elektromagnetického pole prostorem ve formě monochromatického elektromagnetického vlnění. Podmínky vzniku elektromagnetického vlnění jsou dvě: „volné elektromagnetické pole“ a „obrovský počet koherentních fotonů“ - souhrnně „monochromatické volné elektromagnetické pole v rozlehlém prostoru“. Za těchto dvou podmínek lze také elektromagnetické záření spojovat s elektromagnetickým vlněním.

Pohybovou rovnicí vlnění je vlnová rovnice (B21) nebo pro vlnění v řadě bodové vlnová rovnice (B19). Např. vlnové rovnici (B19) pak vyhovuje pohybový zákon vlnění - vlnová funkce (B18). Připomenutý mechanismus pohybových zákonů a pohybových rovnic pro vlnění umožňuje prostřednictvím rovnic (B31) a (B32) dokázat, že monochromatické volné elektromagnetické pole se šíří „rozlehlým“ prostorem formou „klasické“ monochromatické elektromagnetické vlny s fázovou rychlostí rovnou rychlosti světla.

K důkazu je nejdříve potřebné doplnit aplikaci symbolického vektoru „nabla“ (B25) z hlediska jeho působení na skalár *f* (skalární funkci *f*). Tato aplikace má tvar

$$\text{(B33)} \qquad \nabla f = \text{grad}\, f\,\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Na základě definic operátorů div a rot podle (B26), operátoru grad podle (B33) a Laplaceova operátoru Δ podle (B20) lze dokázat operátorový vztah pro dvojnásobný vektorový součin

$$\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta\,.$$

Použití tohoto operátorového vztahu na intenzitu elektrického pole vede ke vztahu

$$\text{rot rot}\ \vec{E} = \text{grad div}\ \vec{E} - \Delta\ \vec{E}$$

Podle rovnic (B31) i (B32) je

$$\text{div}\ \vec{E} = 0 \ \text{ a } \ \text{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,.$$

Odtud plyne s využitím záměnnosti operátorů rot a $\dfrac{\partial}{\partial t}$ vztah

$$\Delta\ \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\ \vec{B} = 0.$$

Po dosazení za rot $\vec{B}$ z rovnic (B31) a (B32) lze získat pro vakuum rovnici

$$\text{(B34)} \qquad \Delta\ \vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\,\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

a pro dielektrikum bez volných nábojů podobnou rovnici

$$\text{(B35)} \qquad \Delta\ \vec{E} - \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Rovnice (B34) a (B35) je možné obdobně odvodit i pro magnetické pole. Po srovnání s obecnou vlnovou rovnicí (B21) je zřejmé, že volné elektromagnetické pole se pro obrovský počet koherentních fotonů šíří prostorem jako monochromatické vlnění, které spočívá v tom, že změny intenzity elektrického pole a indukce magnetického pole postupují prostorem rychlostí vyjádřenou ve vakuu a v dielektriku vzorci

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\,,\ v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}\,.$$

Elektrické a magnetické vlny nejsou na sobě nezávislé, neboť vektory intenzity elektrického pole a indukce magnetického pole jsou vázány vztahy (B31) a (B32) - elektrické a magnetické vlnění tvoří nedělitelný celek. Proto lze hovořit o monochromatickém elektromagnetickém vlnění, které se ve vakuu šíří rychlostí světla. Vzhledem ke vztahu (B30a) je zřejmé, že Poyntingův vektor má pro monochromatickou elektromagnetickou vlnu směr odpovídající směru jejího šíření a popisuje spojitý transport energie ve volném elektromagnetickém poli. Shoda rychlostí elektromagnetických a optických vln ve vakuu vedla Maxwella k elektromagnetické teorii světla. Experimentálně byla existence elektromagnetických vln potvrzena v r. 1888 Hertzem.

Kontrolní otázky:

1) Za jakých podmínek lze hovořit o klasicky pojatém elektromagnetickém poli
2) Jaká je pohybová rovnice klasického náboje ve volném elektromagnetickém poli
3) Jaký je tvar elektromagnetické síly působící na klasický náboj
4) Jaký je pohybový zákon klasického náboje v příčném homogenním elektrickém poli
5) Jaký je pohybový zákon klasického náboje v podélném homogenním elektrickém poli
6) Jaký je pohybový zákon klasického náboje v homogenním magnetickém poli
7) Jak se popisují zřídla elektromagnetického pole
8) Jak se popisují víry elektromagnetického pole
9) Jaký je tvar Maxwellových rovnic ve statické, stacionární, kvazistacionární a nestacionární teorii elektromagnetického pole
10) Jaký je tvar Maxwellových rovnic pro volné elektromagnetické pole
11) Dokažte existenci monochromatické elektromagnetické vlny
12) Jaká je rychlost šíření elektromagnetické vlny ve vakuu a v prostředí

Literatura:

Záškodný,P.: Přehled základů teoretické fyziky (s aplikací na radiologii). Didaktis, Bratislava, 2005

Záškodný,P.: Survey of Principles of Theoretical Physics (with application to radiology). Algoritmus, Avenira Foundation, 2006

Kozlovská,D., Skalická,Z., Záškodný,P.: Úvod do praktika z radiologické fyziky. JU, České Budějovice, 2005

Záškodný,P., Tarábek,P.: Didaktická komunikace a její aplikace.
MFI, ročník 16, ISSN 1210-1761